

管外側面から放射加熱、内外表面に熱伝達がある 円管の熱応力

藤 井 石 根*

Summary

This paper is concerned with the thermal stresses in a hollow cylinder of which outer surface is heated mainly by radiate heat transfer together with convective, while inner surface is cooled by convective with a finite heat transfer coefficient.

The cylinders under such thermal conditions mentioned above are very common, and device-elements such as water pipes of boiler, solar energy collector-tubes, etc., are considered to be good examples for them.

Therefore, in addition to theoretical analysis, in this paper several results of numerical calculations for the analytical are shown by graphs, in order to make clear the behaviours of temperature and thermoelasticity distributions induced by the change of tube-wall-thickness, the degree of radiate heating load and the value of Biot numbers on inside and outside surfaces of tube.

§ 1. 緒 言

管内に流体が流れている、そのような管が外部より放射加熱を受けるケースは少なくない。たとえばボイラの水管などは熱負荷としては放射ならびに対流熱伝達により加熱される例であるが、この部類に属する従来のものの一例と考えられる。ところで近年、これまでそれ程の関心を払わずに使用してきた諸資源、とくに在来の化石燃料を主体とするエネルギー資源の有限性を身近なものとして感じるようになってきたこともあって、省エネルギーを真剣に考えるようになり、かつ太陽エネルギーなどの自然エネルギーを積極的に利用する傾向が見られる。従来、かなり一般に普及している太陽熱利用例として太陽温水器があり、また最近ではサンシャイン計画の一環として太陽熱発電に関する研究も試みられているが、これらの機器の特に集熱部の機構をみるとき作動流体を加熱する部分の形状が円管状のものが少なくない。

本報ではこのようなかたちで使用される円管をモデルに外側面から放射加熱されている円管が内部に存在する流体により主に冷却され、かつ一部の熱は管外側面からも熱伝達により冷却される、そのような状況下にあるときに生ずる定常熱応力を解析的に扱ったものである。なお理解を深めるために解析結果に基づき若干例について数値計算を試み、その結果も合せて示した。

*会員 明治大学工学部・助教授、工博

§ 2 主な記号

a	: 円管内半径
b	: 円管外半径
E	: 縦弾性係数
h	: 熱伝達率
r	: 座標(半径方向)
T	: 温度
T_{∞}	: 円管外部をとりまく流体主流温度
α	: 係数
β	: 係数
ζ	: 線膨張係数
θ	: 座標(円周方向)
λ	: 熱伝導率
ν	: ポアソン比
σ	: 熱応力
τ	: セン断力
ϕ	: 応力関数
Ω''	: 放射熱流束

添 字

a	: 円管内表面
b	: 円管外表面

r	: 半径方向
θ	: 円周方向
z	: 管軸方向

無次元数

B_a	: ビオ一数 $\left(= \frac{h_a a}{\lambda} \right)$
B_b	: ビオ一数 $\left(= \frac{h_b b}{\lambda} \right)$
R	$\left(= \frac{r}{a} \right)$
R_0	$\left(= \frac{b}{a} \right)$
ς_r	$\left(= \frac{\lambda \sigma_r}{KE \zeta b \Omega''_0} \right)$
ς_{θ}	$\left(= \frac{\lambda \sigma_{\theta}}{KE \zeta b \Omega''_0} \right)$
ς_z	$\left(= \frac{\lambda \sigma_z}{KE \zeta b \Omega''_0} \right)$
$T_{r\theta}$	$\left(= \frac{\lambda \tau_{r\theta}}{KE \zeta b \Omega''_0} \right)$
Υ	$\left(= -\frac{\lambda T}{b \Omega''_0} \right)$
Υ_{∞}	$\left(= -\frac{\lambda T_{\infty}}{b \Omega''_0} \right)$

§ 3 理 論 解 説

3.1 円管の温度分布

いま内外半径が各々 a , b なる円管があって、管内部に一様な温度の流体が存在し、管外面からは放射加熱を受けるものとする。その結果、加えられた熱エネルギーは主に管内部の流体に熱伝達によって伝わり、かつ一部の熱は管外側面からも逃げるものとし、管の長手方向については温度変化がないものとするとき、管内の流体の主流温度を基準温度として円管に於ける温度分布 $T(r, \theta)$ は次式を満足する。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここで r , θ は図1に示す如く各々、半径方向、円周

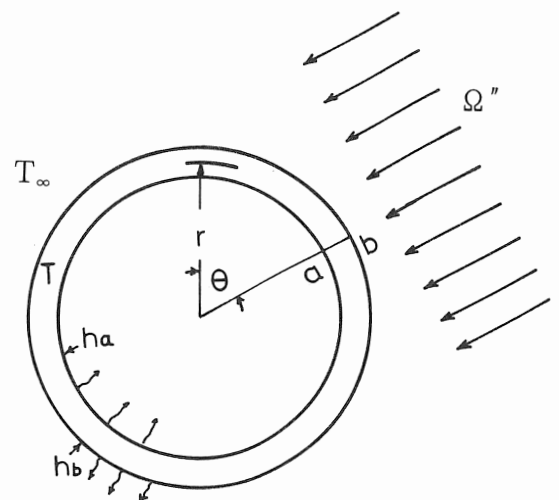


図1 座標系および加熱冷却条件

方向各座標系を表わす。一方、このような系における境界条件は、 λ は円管の熱伝導率、 h_a , h_b は管内外表面に於ける各熱伝達率、 Ω'' は θ によって変化する放射熱流束、 T_∞ は管外部をとりまく流体の主流温度として、

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h_a T \quad (r=a) \dots \dots \dots (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \Omega'' - h_b (T - T_\infty), \quad (r=b) \dots \dots \dots (3)$$

となる。ここで、これらの各式を満足する T の解は r のみの関数 $\mathbf{R}(r)$ と θ のみの関数 $\Theta(\theta)$ の積で与えられるものとし(1)式を変数分離すれば n を後に定める定数として、

Θ に関する式として、

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0$$

$$\therefore \Theta = C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \dots \dots \dots (4)$$

となり、 Θ は周期 2π であることを配慮すれば、

$$n=0, 1, 2, 3 \dots \dots \dots$$

となる。ここで C_n , D_n は積分定数である。

他方 $\mathbf{R}(r)$ については(1)式より、

$$r^2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{dr^2} + r \frac{d\mathbf{R}}{dr} - n^2 \mathbf{R} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

(2)式より、

$$\lambda \frac{d\mathbf{R}}{dr} = h_a \mathbf{R} \dots \dots \dots (6)$$

を得、これら2つの関係を満足する $\mathbf{R}$ の解として次式が得られる。

$$\mathbf{R}_n(r) = \left\{ \begin{array}{ll} A_0 \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{B_a} \right) & (n=0) \\ A_n a^n \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n + \frac{n-B_a}{n+B_a} \left(\frac{r}{a} \right)^{-n} \right\} & (n=1, 2, 3 \dots \dots \dots) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

ここで $A_n (n=0, 1, 2, 3 \dots \dots \dots)$ は n の値によって変化する定数であり B_a はビョー数で $B_a = \frac{h_a a}{\lambda}$ である。従って温度 $T(r, \theta)$ に関する解は(4), (7)の両式より定数を書き換えることによつて次の形で与えられる。

$$T(r, \theta) = \alpha_0 \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{B_a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n + \frac{n-B_a}{n+B_a} \left(\frac{r}{a} \right)^{-n} \right\} \times (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \dots \dots \dots (8)$$

次に上式を r について微分して得られた式と(1)式を(3)式に代入し整理して示せば、同式は、

$$B_b = \frac{h_b b}{\lambda} \text{ として、}$$

$$\frac{\Omega'' b}{\lambda} = \alpha_0 \left(1 + B_b \ln \frac{b}{a} + \frac{B_b}{B_a} \right) - T_\infty B_b$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+B_b) \left(\frac{b}{a} \right)^n - \frac{n-B_a}{n+B_a} (n-B_b) \left(\frac{b}{a} \right)^{-n} \right\} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \dots\dots\dots (9)$$

ここで上式の左辺 $\Omega''b/\lambda$ をフーリエ級数に展開し、

$$\frac{\Omega''b}{\lambda} = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_n \cos n\theta + \xi_n \sin n\theta \right\} \quad (-\pi < \theta < \pi) \dots\dots\dots (10)$$

なる形で表わすとき、級数の係数 δ_0 , δ_n , ξ_n は各々、

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' d\theta & \delta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \cos n\theta d\theta \\ \xi_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \sin n\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。このことから(9)式の左辺が(10)式の形に級数展開されたものとして同式のあい対する項の係数を比較すれば、

$$\delta_0 = \alpha_0 \left\{ 1 + B_b \ln \frac{b}{a} + \frac{B_b}{B_a} \right\} - T_{\infty} B_b = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' d\theta \dots\dots\dots (12)$$

$$\therefore \alpha_0 = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' d\theta + T_{\infty} B_b}{1 + B_b \ln \frac{b}{a} + \frac{B_b}{B_a}} \dots\dots\dots (13)$$

以下、同様にして α_n , β_n に関して次式が得られる。

$$\alpha_n = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \cos n\theta d\theta}{(n+B_b) \left(\frac{b}{a} \right)^n - \frac{n-B_a}{n+B_a} (n-B_b) \left(\frac{b}{a} \right)^{-n}} \dots\dots\dots (14)$$

$$\beta_n = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \sin n\theta d\theta}{(n+B_b) \left(\frac{b}{a} \right)^n - \frac{n-B_a}{n+B_a} (n-B_b) \left(\frac{b}{a} \right)^{-n}} \dots\dots\dots (15)$$

したがってこの場合の温度分布を表わす解として結局次式が得られる。

$$T(r, \theta) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' d\theta + T_{\infty} B_b}{1 + B_b \ln \frac{b}{a} + \frac{B_b}{B_a}} \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{B_a} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^n + \frac{n-B_a}{n+B_a} \left(\frac{r}{a}\right)^n}{(n+B_b) \left(\frac{b}{a}\right)^n - \frac{n-B_a}{n+B_a} (n-B_b) \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}} \left\{ \frac{\cos n\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \cos n\theta d\theta \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin n\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \sin n\theta d\theta \right\} \right\} \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

§ 3.2 熱応力解析

円管の肉厚が管径に比して十分に薄い場合には円筒殻の問題として扱い得るが、必ずしもその様な場合ばかりとは限らないので、ここでは一般の二次元問題として取扱うことにする。

さて、この場合、熱応力を求めるに当っては、まず次式、

$$\nabla^4 \phi + KE \zeta \nabla^2 T = 0 \quad (a < r < b) \dots\dots\dots (17)$$

を満足する応力関数 ϕ が見出されれば、応力成分 $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

によって与えられる。ここで各応力にある添字は応力の各方向成分を示し、 τ はせん断力を表わす。

また(17)式の K は定数で ν をポアソン比とすると平面応力状態の場合で $K=1$ 、平面ひずみ状態では $K=1/(1-\nu)$ となり、この場合、管の長手方向の座標を z とおき、同方向の熱応力を σ_z とすれば、

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E \zeta T \dots\dots\dots (19)$$

となる。なお E は材料の縦弾性係数、 ζ は材料の線膨張係数、ラプラスの演算子 ∇^2 は、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2,$$

を表わす。

さて応力に関する条件として、外力が全く作用していないものとし、応力は温度分布の状態からのみ生ずる場合を考えれば、境界条件として、たとえば、

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (\text{境界 } r=b \text{ で}) \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= m_1 r \cos \theta + m_2 r \sin \theta + m_3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= m_1 \cos \theta + m_2 \sin \theta \end{aligned} \right\} (\text{境界 } r=a \text{ で}) \dots\dots\dots (21)$$

として与えることができる。ここで定数 m_i ($i=1, 2, 3$) は任意定数ではなく Michell の条件式、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial r} \sin \theta - \frac{\partial \nabla^2 \phi}{r \partial \theta} \cos \theta \right) r^2 d\theta &= -KE \zeta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta - \frac{\partial T}{r \partial \theta} \cos \theta \right) r^2 d\theta \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \nabla^2 \phi}{r \partial \theta} \sin \theta \right) r^2 d\theta &= -KE \zeta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial T}{r \partial \theta} \sin \theta \right) r^2 d\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial r} r d\theta = -KE \zeta \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial r} r d\theta \quad (22)$$

を $r=a$ において適用することにより求まる定数である。

いま, $T(r, \theta)$ に関する(16)式を,

$$T(r, \theta) = P_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(r) \sin n\theta \quad (23)$$

なる形で記述するとき, (5)式の関係を検討すれば,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} P_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dQ_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} Q_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

となる。このことから $T(r, \theta)$ の式の形にならって応力関数 ϕ の形を,

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(r) \sin n\theta \quad (26)$$

とおき, (17)式に代入, $\nabla^2 T = 0$ より $p_n(r)$ に関し $' = \frac{d}{dr}$ を表わすものとして,

$$p_n'''' + \frac{2}{r} p_n''' - \frac{1+2n^2}{r^2} p_n'' + \frac{1+2n^2}{r^3} p_n' + \frac{n^4-4n^2}{r^4} p_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

q_n に関しては,

$$q_n'''' + \frac{2}{r} q_n''' - \frac{1+2n^2}{r^2} q_n'' + \frac{1+2n^2}{r^3} q_n' + \frac{n^4-4n^2}{r^4} q_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

が得られ(20), (21)両式の境界条件に関しては p_n, q_n それぞれに対して,

$$\left[p_n(b) = \frac{dp_n(b)}{dr} = 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \right] \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0(a) &= m_3, p_1(a) = m_1 a, n \geq 2 \text{ で } p_n(a) = 0 \\ \frac{dp_0(a)}{dr} &= 0, \frac{dp_1(a)}{dr} = m_1, n \geq 2 \text{ で } \frac{dp_n(a)}{dr} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left[q_n(b) = \frac{dq_n(b)}{dr} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \right] \quad (29)'$$

$$\left. \begin{aligned} q_1(a) &= m_2 a, n \geq 2 \text{ で } q_n(a) = 0 \\ \frac{dq_1(a)}{dr} &= m_1, n \geq 2 \text{ で } \frac{dq_n(a)}{dr} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)'$$

が得られる。また Michell の条件に関しては, まず(26)式より,

$$\nabla^2 \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} p_n \right\} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dq_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} q_n \right\} \sin n\theta$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} p_n \right\} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dq_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} q_n \right\} \sin n\theta \\ \frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} p_n \right\} (-n \sin n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dq_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} q_n \right\} n \cos n\theta\end{aligned}$$

又, (23) 式より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(r)}{dr} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dQ_n(r)}{dr} \sin n\theta \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(r) (-n \sin n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(r) n \cos n\theta\end{aligned}$$

これらの関係式を(22)式の最初の式に代入, 積分計算を施せば $n \neq 1$ のとき両辺共に零となり, $n=1$ のときのみ次の関係式が得られる。

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dq_1}{dr} \right) - \frac{q_1}{r^2} \right\} = -KE \zeta \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) Q_1(r) \dots \dots \dots (31)$$

以下, 同様にして(22)式の残りの 2 つの式より各々,

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_1}{dr} \right) - \frac{p_1}{r^2} \right\} = -KE \zeta \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) P_1(r) \dots \dots \dots (32)$$

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_0}{dr} \right) \right\} = -KE \zeta \frac{dp_0(r)}{dr} \dots \dots \dots (33)$$

が得られる。このことから Michell の条件は p_0, p_1 それに q_1 のみに限って関係し $n \geq 2$ なる p_n, q_n には自動的にこの条件は満され, 従って p_n, q_n に関する境界値問題なることを考慮して, 次式が, 成り立つ。

$$p_n = q_n = 0 \quad (n \geq 2) \dots \dots \dots (34)$$

さて, (27) 式において $n=0$ とおけば,

$$p_0'''' + \frac{2}{r} p_0''' - \frac{1}{r^2} p_0'' + \frac{1}{r^3} p_0' = 0$$

$$\therefore p_0 = C_1^0 + C_2^0 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + C_3^0 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + C_4^0 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \dots \dots \dots (35)$$

となり $C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0$ は積分定数で境界条件等により定まる定数である。故に (29), (30) 式それに (35) 式を用いて次の 4 つの関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} C_1^0 + C_2^0 \ln \frac{b}{a} + C_3^0 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + C_4^0 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \ln \frac{b}{a} &= 0 \\ \frac{C_2^0}{b} + \frac{2C_3^0}{a^2} b + \frac{C_4^0}{a^2} b (1 + 2 \ln \frac{b}{a}) &= 0 \\ C_1^0 + C_3^0 &= m_3 \\ C_2^0 + 2C_3^0 + C_4^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

一方、(33)式の P_0 に(35)式を代入すると(33)式の左辺は $4C_4^0/a^2 r$ となり、かつ $P_0(r)$ は(16)式の右辺第一項に相当、

$$\text{すなわち、} P_0(r) = \alpha_0 \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{Ba} \right)$$

なることにより次の関係式が得られる

$$\frac{4C_4^0}{a^2} = -KE \zeta \alpha_0 \dots\dots\dots (37)$$

よって(36), (37)の両式より、

$$\left. \begin{aligned} C_2^0 &= -\frac{KE \zeta \alpha_0 a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \\ C_3^0 &= \frac{KE \zeta \alpha_0 a^2}{8(b^2 - a^2)} \left\{ (1 + 2 \ln \frac{b}{a}) b^2 - a^2 \right\}, \quad C_4^0 = -\frac{KE \zeta \alpha_0}{4} a^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

次に(27)式において $n=1$ とおくと、

$$p_1'''' + \frac{2}{r} p_1''' - \frac{3}{r^3} p_1'' + \frac{3}{r^2} p_1' - \frac{3}{r^4} p_1 = 0$$

$$\therefore p_1 = C_1^1 \frac{r}{a} + C_2^1 \frac{a}{r} + C_3^1 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + C_4^1 \left(\frac{r}{a} \right) \ln \frac{r}{a}$$

P_0 の場合と同様に(29), (30)両式における P_n に関する境界条件を適用すれば $C_1^1 \sim C_4^1$ に関する4つの境界条件式が得られる。又(32)式における $\{ \}$ の内の値を計算すれば、

$$\frac{8r}{a^3} C_3^1 + \frac{2}{ar} C_4^1 \text{ となり、(16)式より、}$$

$$P_1(r) = \alpha_1 \left\{ \frac{r}{a} + \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \cdot \frac{a}{r} \right\}$$

ここで α_1 は(14)式より、

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \cos \theta d\theta}{(1 + B_b) \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{1 - B_b}{1 + B_b} (1 - B_b) \left(\frac{a}{b} \right)} \dots\dots\dots (39)$$

となり、これらの値を(32)式に代入、計算すれば、まず C_4^1 の値が求まり、さきの境界条件より、これ以外の積分定数も求まり、

$$\left. \begin{aligned} C_2^1 &= -\frac{KE \zeta a^2 b^2 \alpha_1}{4(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \\ C_3^1 &= \frac{KE \zeta a^4 \alpha_1}{4(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a}, \quad C_4^1 = -\frac{1}{2} KE \zeta a^2 \alpha_1 \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

全く同様に(28)式において $n=1$ と(29)', (30)'の境界条件式, (31)式の, Michellの条件式を用いて, このさいの積分定数を求めれば, これらの式の形は P_1 に関する場合と全く同一であるので(40)式と全く同一形式の結果が得られ α_1 が β_1 におき代るだけの違いである。ここで β_1 は(15)式より,

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b}{\lambda} \Omega'' \sin \theta \, d\theta}{(1+B_b) \left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1-B_a}{1+B_a} (1-B_b) \left(\frac{a}{b}\right)} \dots\dots\dots (41)$$

でこれらを各々 C_2^1, C_3^1, C_4^1 とおく, 故に(26)式より ϕ は,

$$\phi = P_0 + P_1 \cos \theta + q_1 \sin \theta$$

となり熱応力各成分は(18), (19)式より,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} - \frac{P_1}{r^2} \right) \cos \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial q_1}{\partial r} - \frac{q_1}{r^2} \right) \sin \theta \\ &= \frac{C_2^0}{r^2} + \frac{2C_3^0}{a^2} + \frac{C_4^0}{a^2} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \left(-\frac{2a}{r^3} C_2^1 + \frac{2r}{a^3} C_3^1 + \frac{C_4^1}{ar} \right) \cos \theta \\ &\quad + \left(-\frac{2a}{r^3} C_2^{1'} + \frac{2r}{a^3} C_3^{1'} + \frac{C_4^{1'}}{ar} \right) \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 q_1}{\partial r^2} \sin \theta = -\frac{C_2^0}{r^2} + \frac{2}{a^2} C_3^0 + \frac{C_4^0}{a^2} (3 + 2 \ln \frac{r}{a}) \\ &\quad + \left(\frac{2a}{r^3} C_2^1 + \frac{6r}{a^3} C_3^1 + \frac{C_4^1}{ar} \right) \cos \theta + \left(\frac{2a}{r^3} C_2^{1'} + \frac{6r}{a^3} C_3^{1'} + \frac{C_4^{1'}}{ar} \right) \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} (-P_1 \sin \theta + q_1 \cos \theta) \right\} = \left(-\frac{2a}{r^3} C_2^1 + \frac{2r}{a^3} C_3^1 + \frac{1}{ar} C_4^1 \right) \sin \theta \\ &\quad - \left(-\frac{2a}{r^3} C_2^{1'} + \frac{2r}{a^3} C_3^{1'} + \frac{1}{ar} C_4^{1'} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

これらの式に(38), (40)式等の関係を代入して整理すれば,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{KE\zeta\alpha_0}{2} \left\{ \left(\frac{b}{r} \right)^2 \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{r}{a} \right\} \\ &\quad + \frac{KE\zeta ar}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{KE\zeta\alpha_0}{2} \left\{ \left(\frac{b}{r} \right)^2 \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{r}{a} - 1 \right\} \\ &\quad + \frac{KE\zeta ar}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \left(3 - \frac{a^2 + b^2}{r^2} - \frac{a^2 b^2}{r^4} \right) (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta) \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{KE\zeta ar}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) (\alpha_1 \sin \theta - \beta_1 \cos \theta) \dots\dots\dots (44)$$

また平面ひずみ状態における δ_z は(19)式において σ_r, σ_θ に対して各々(42), (43)を, T に対しては(16)式を代入することによって解が得られ次式を得る。

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \frac{\nu KE \zeta \alpha_0}{2} \left\{ \left(\frac{b}{r} \right)^2 \left(\frac{2r^2}{b^2 - a^2} \right) \ln \frac{b}{a} - 2 \ln \frac{r}{a} - 1 \right\} \\
& + \frac{\nu KE \zeta a r}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1 - B_a}{1 + B_a} \left\{ 2 - \frac{(a^2 + b^2)}{r^2} \right\} (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta) \\
& + E \zeta \left[\alpha_0 \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{B_a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n + \frac{n - B_a}{n + B_a} \left(\frac{r}{a} \right)^n \right\} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right] \\
& \dots\dots\dots (45)
\end{aligned}$$

§ 4. 数 値 計 算

得られた結果に対する理解をより深めるために、具体的な加熱、冷却条件を想定して数値計算を試みた。

さて、数値計算を試みるに際して、まず各量の無次元化表示を行なっておくと何かと便利であるので、ここでは次の無次元量を導入する。

$$\frac{b}{a} = R_0, \quad \frac{r}{a} = R \quad (1 \leq R \leq R_0),$$

また $f(\theta)$ は角度 θ の 2π を周期とするある関数系を表わすものとして Ω'' を、

$$\Omega'' = \Omega''_0 \cdot f(\theta)$$

で表わし、更に、

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda T}{b \Omega''_0} = \Upsilon, \quad \frac{\lambda T_\infty}{b \Omega''_0} = \Upsilon_\infty, \quad \frac{\lambda \sigma_r}{KE \zeta b \Omega''_0} = \varsigma_r \\
\frac{\lambda \sigma_\theta}{KE \zeta b \Omega''_0} = \varsigma_\theta, \quad \frac{\lambda \tau_{r\theta}}{KE \zeta b \Omega''_0} = T_{r\theta}, \quad \frac{\lambda \sigma_z}{KE \zeta b \Omega''_0} = \varsigma_z
\end{aligned}$$

なる無次元量を導入し、まず(16)式を無次元化表示すれば、

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_0 &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \Upsilon_\infty B_b}{1 + B_a \ln R_0 + \frac{B_b}{B_a}} \\
\bar{\alpha}_n &= \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta}{(n + B_b) R_0^n - \frac{n - B_a}{n + B_a} (n - B_b) R_0^{-n}} \\
\bar{\beta}_n &= \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta}{(n + B_b) R_0^n - \frac{n - B_a}{n + B_a} (n - B_b) R_0^{-n}} \\
&\dots\dots\dots (46)
\end{aligned}$$

として、

$$\Upsilon = \bar{\alpha}_0 \left(\ln R + \frac{1}{B_a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(R^n + \frac{n-B_a}{n+B_a} R^{-n} \right) (\bar{\alpha}_n \cos n\theta + \bar{\beta}_n \sin n\theta) \quad \dots\dots\dots(16')$$

となり(42)~(45)の各式は各々次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \varsigma_r = & \frac{\bar{\alpha}_0}{2} \left\{ \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left(\frac{R^2-1}{R_0^2-1} \right) \ln R_0 - \ln R \right\} \\ & + \frac{R}{2(R_0^2+1)} \cdot \frac{1-B_a}{1+B_a} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) (\bar{\alpha}_1 \cos \theta + \bar{\beta}_1 \sin \theta) \dots\dots\dots(42)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_\theta = & \frac{\bar{\alpha}_0}{2} \left\{ \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left(\frac{R^2+1}{R_0^2-1} \right) \ln R_0 - \ln R - 1 \right\} \\ & + \frac{R}{2(R_0^2+1)} \cdot \frac{1-B_a}{1+B_a} \left(3 - \frac{R_0^2+1}{R^2} - \frac{R_0^2}{R^4} \right) (\bar{\alpha}_1 \cos \theta + \bar{\beta}_1 \sin \theta) \dots\dots\dots(43)' \end{aligned}$$

$$Tr_\theta = \frac{R}{2(R_0^2+1)} \cdot \frac{1-B_a}{1+B_a} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) (\bar{\alpha}_1 \sin \theta - \bar{\beta}_1 \cos \theta) \dots\dots\dots(44')$$

$$\begin{aligned} \varsigma_z = & \frac{\nu \bar{\alpha}_0}{2} \left\{ \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left(\frac{2R^2}{R_0^2-1} \right) \ln R_0 - 2 \ln R - 1 \right\} \\ & + \frac{\nu R}{(R_0^2+1)} \cdot \frac{1-B_a}{1+B_a} \left(2 - \frac{R^2+1}{R^2} \right) (\bar{\alpha}_1 \cos \theta + \bar{\beta}_1 \sin \theta) \\ & + \frac{\bar{\alpha}_0}{K} \left(\ln R + \frac{1}{B_a} \right) + \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left(R^n + \frac{n-B_a}{n+B_a} R^{-n} \right) (\bar{\alpha}_n \cos n\theta + \bar{\beta}_n \sin n\theta) \dots\dots\dots(45)' \end{aligned}$$

いま、管は平行光による管外側面一方向からの放射加熱を受けるものとし、図1に示すような座標系を選ぶものとして、

$$f(\theta) = \begin{cases} \cos \theta & (|\theta| \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} < |\theta| \leq \pi) \end{cases}$$

とおくとき、(46)式は、

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 = & \frac{\frac{1}{\pi} + \Upsilon_\infty B_b}{1 + B_a \ln R_0 + \frac{B_b}{B_a}} \\ \bar{\alpha}_1 = & \frac{0.5}{(1+B_b)R_0 - \frac{1-B_a}{1+B_a}(1-B_b)\frac{1}{R_0}} \\ \bar{\alpha}_n = & \frac{\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{n+1} \sin \left(\frac{n+1}{2} \pi \right) + \frac{1}{n-1} \sin \left(\frac{n-1}{2} \pi \right) \right\}}{(n+B_b)R_0^n - \frac{n-B_a}{n+B_a}(n-B_b)R_0^{-n}} \quad (n \geq 2) \\ \bar{\beta}_n = & 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(46)'$$

となり、温度分布ならびに熱応力各成分は(16)', (42)'~(45)'の各式を用いることによって容易に知ること

ができる。図2～5の各図は円管内外面表面における T , T_θ それに ζ_z の分布状況を示したもので、当然のことながら管の内外表面上では ζ_r , それに $\tau_{r\theta}$ は零となる。勿論, R の値が1, R_0 以外のところではこれら2つの応力はある程度の値の分布を有するが全般に他と比較して小さな値であるので図示することをここでは省略した。

さて、これらの図中、熱応力 ζ_θ , ζ_z に関するもののうち値が負のものは圧縮応力、正のものは引張応力であることを意味し、図5の T の値の負は管内に存在する流体主流温度よりも低温度であることを意味する。

図2は管の肉厚, すなわち R_0 の値を変えたさいの動向を示したもので管が外部より加熱されていることもあって T に対しては R_0 の値が大きくなる程, $R=R_0$ での T 分布の変化の度合いはげしく, $R=1$ でのそれは逆で、値も全体的に小さくなっている。このような傾向は、 ζ_z に対しても見られ ζ_θ については R_0 の値が大きくなる程、応力分布値の絶対値は全体的に増大している。このことから R_0 の値が小さくなる程、温度、熱応力両者に対し管内外表面での値の差が小さくなることが判る。

図3は B_a , すなわち円管内面での熱伝達率を変化させたことにも相当するが、このさいの温度、熱応力各分布の動向を示したものである。この場合、式(42), (43), (44)の各式と形から容易に察せられようが、温度の分布状況は r と θ によって変化するにも拘らず、 $B_a=1$ のときはこれらの式は θ には無関係となり、軸対称問題として取扱った場合の解と一致し、興味深い場合である。このことは図3の ζ_θ に対する曲線a, bからも判る。ところで B_a の値を大きくすると、温度変化の度合いも全般的に小さくなることから ζ_z に対する分布状況も完全側へと移行していることが判る。一方 ζ_θ については必ずしもその限りではないが、これについては絶対値そのものの大きさが小さいので問題にならないであろう。

図4は円管外面での熱伝達率、すなわち B_b の値を変化させた場合の動向を示したもので、図3の場合と同様、 $T_\infty=0$ なることから同管外側をとりまく流体主流温度が零の場合である。さて、 $B_b=0$ なる場合は管外表面からの熱損失がない場合、いわゆる断熱状態にある場合に相当し、この状態をつくり出すために、管の外側を真空にするなどして種々、努力が払われているケースでもある。しかし、同表面からの熱損失が存在する方が、すなわち $B_b=1$ の場合と比較しても明らかな様に系内での温度差が小さくなることから誘起熱応力も小さく、完全側へ移行しており、このことは例えば同管を太陽熱集熱器の集熱管とみなした場合に集熱効率を高める為の条件とうらはらの関係であると言える。

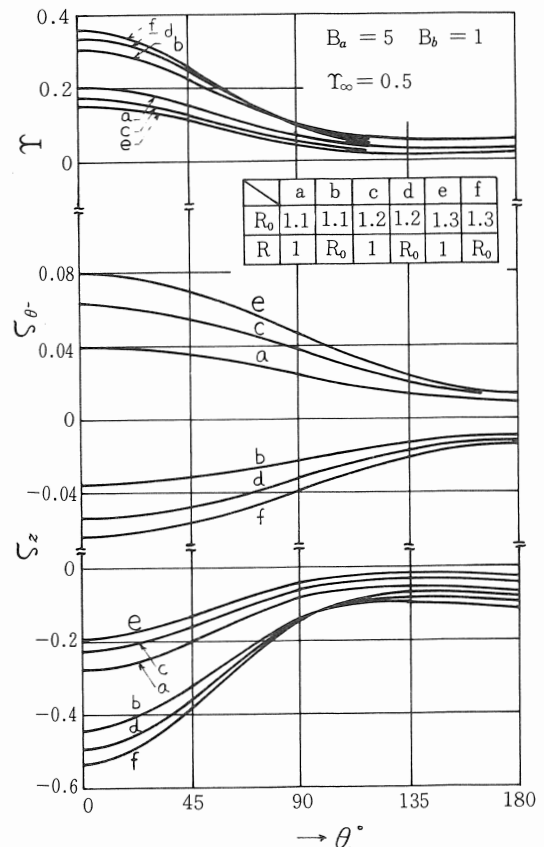


図2. 管の肉厚変化による T, ζ_z, ζ_θ の動向

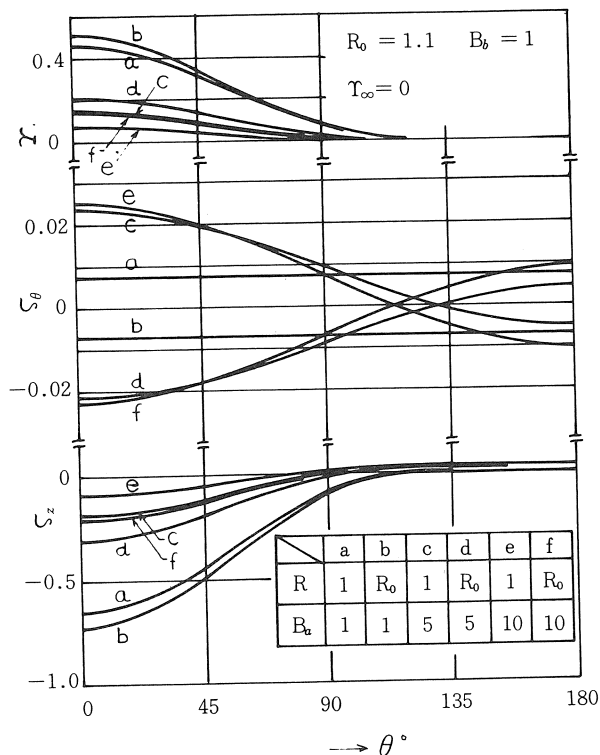


図3. B_a の値の変化による T, S_θ, S_z の動向

図5は T_∞ をパラメータにした場合の動向を示したもので $T_\infty \leq 0$ なる条件は管内流体主流温度よりも低温度の流体で同管外部がかこまれている場合であり、従って管外表面からも明らかに熱が失われている場合である。勿論、 $T_\infty > 0$ であっても、管外流体温度が管の外表面温度よりも低温度のところでは管が冷却されることになるが、これと逆の温度条件のときは管外周囲の流体によって加熱されることになる。同図から T_∞ の値が -0.5 より小さな値になると $\theta=180^\circ$ での熱応力 S_θ, S_z の絶対値がより大きくなる傾向が伺えるが、このようなケースは實際上、少ないものと考えられる。一方 T_∞ の値が大きくなると熱応力面については逆に $\theta=0^\circ$ で絶対値の増加の傾向が見られる。

以上、各パラメータによる S_θ, S_z の動向をながめてきたが、絶対値の大きさからみて問題になるのは S_z であろう。しかし値の大きな応力は殆んど圧縮応力であることから、配慮すべき点はむしろ、管の曲がり、座屈等の問題であろうと考えられる。

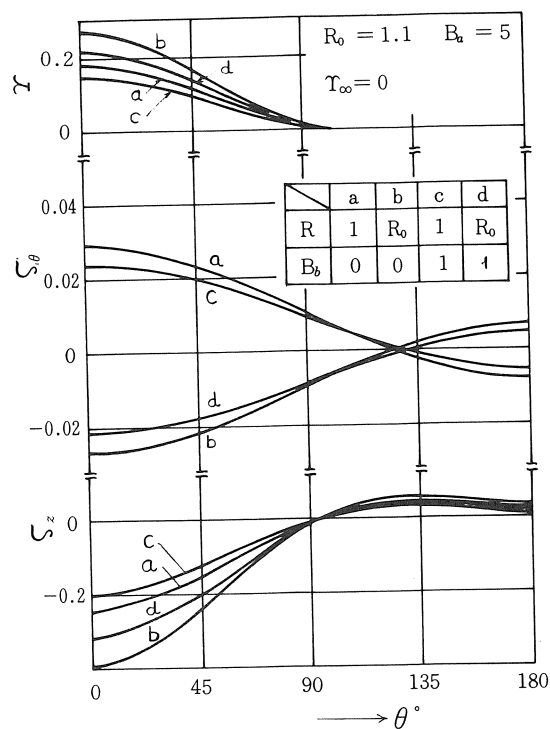


図4. B_b の値の変化による T, S_θ, S_z の動向

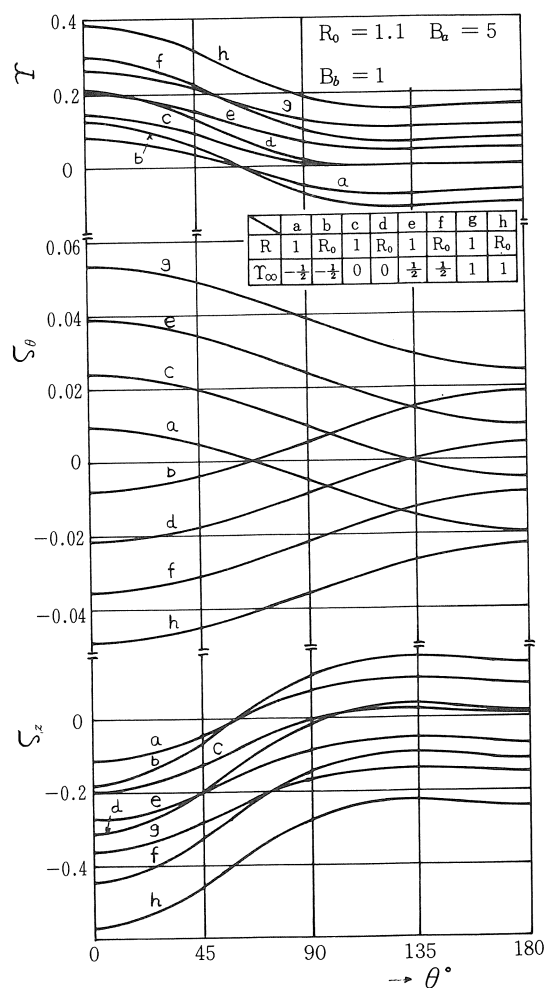


図5. T_∞ の値の変化による T, S_θ, S_z の動向

§ 5. 結 言

本報は太陽熱集熱器のコレクターパイプをモデルにこのようなパイプが受けるであろうところの温度条件を想定して、材料強度上の観点からの検討を加えたものである。本解析に当っては管内流体主流温度は変らないものとし、かつ熱伝達率の値も場所によって変らないと仮定しているので、実際の場合とやゝ異なるところがあるものと考えられるが、大まかな傾向を知る上での何らかの参考になれば幸である。なお蛇足とも思われるが、管内の圧力を高めたり、または管外雰囲気を減圧したりすることによって誘起される、いわゆるメカニカルな応力はここでの熱応力とは別に計算し、これらを加え合せることによって実際に生じている本来の応力の大きさになることは言うまでもない。

最後に、本報での数値計算を行なうに当っては本学大学院生、浜口和洋、中谷康志両君のご助力があったことを記し謝意を表したい。

参 考 文 献

- (1) Vedat S. Arpacr, Conduction Heat Transfer, (1966). Addison-Wesley.
- (2) Boley, B. A. and Weiner, J.H., Theory of Thermal Stress, (1960). John Wiley & Sons.
- (3) 藤井, 一色, 日本機械学会論文集, 39-323(昭48-7), 2042.
- (4) 空気調和・衛生工学会誌, 50-4 (1976).