研究論文

平板型コレクターの最適温度・流量条件 II : APPENDIX

The APPENDIX for "The Optimum Outlet Temperature Condition of Flat-Plate Type Solar Collectors"

鈴　木　研　夫*
Akio Suzuki

このAPPENDIXは，先の論文〝平板型コレクターの最適温度・流量条件″(Vol. 8, No. 4, pp. 5-12)のものであり誌面の都合上掲載号が移ったものである．このため，本文中の式の番号および記号等は全て本論文のものと同一であり，そちらを参照して頂きたい．

本文には，単一コレクターに対する入口温度，流量などをパラメーターとした取得エクセルギー流の最高値の導出，および最適出口温度の入口温度依存性について述べられている．これらの考察の結果としては，最適出口温度 T_o^{opt} は，入口温度が $T_a \leq T_i < \sqrt{T_c{}^m T_a}$ の範囲では T_i の上昇と共に減少し．$T_i \geq \sqrt{T_c{}^m T_a}$ の領域では $\dot{m} \to \infty$ の条件下で T_i の上昇と共に増加することが示されている．

本論文の議論では主に集熱板入口温度 T_i を一定としたものであり，この温度が $\sqrt{T_c{}^m T_a}$ より低い場合に瞬時エクセルギー効率曲線が1つの最大値を持つという事に関して焦点が当てられている．このAPPENDIXでは上記の事を明確にする事に加え，集熱器の到達し得る最高瞬時エクセルギー効率を導く事を目的として記されたものである．

APPENDIX

1）最高エクセルギー効率 $\eta_{ex}^{m,\,max}$ について

熱媒体入口温度 T_i もパラメーターとした最高エクセルギー効率 $\eta_{ex}^{m,\,max}$ を求める．ここで，I 及び T_a は一定であるとし，$T_i < T_c{}^m$ であるとする．(22)より，

$$\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty} = F' \frac{S_p U}{S_r I(1-T_a/T_s)} (T_c{}^m - T_i)(1 - T_a/T_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}1)$$

である．これを T_i について微分を行なって増減表で示せば，

T_i		$\sqrt{T_c{}^m T_a}$	
$\dfrac{d\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty}}{dT_i}$	↗	0	↘

となり，$T_i = \sqrt{T_c{}^m T_a}$ で $\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty}$ の最大値，

$$\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty,\,max} = F' \frac{S_p U}{S_r I} \frac{(\sqrt{T_c{}^m} - \sqrt{T_a})^2}{1 - T_a/T_s} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}2)$$

が与えられる事がわかる．尚，$\dot{m} \to \infty$ で $T_0 \to T_i$ である事を考慮すれば，T_0 と T_i を入れ替えただけの同じ増減表が得られる．これは，$T_i > \sqrt{T_c{}^m T_a}$ の領域で $d\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty}/dT_0 < 0$ である事を意味する．

次に，$\dot{m} \to \infty$ 以外に (24) を満足する T_o^{opt} が存在する時，(27) より

$$\eta_{ex}^{max} = F' \frac{S_p U}{S_r I} \frac{1}{1 - T_a/T_s} \times (T_c{}^m - T_o^{opt})\left(1 - \frac{T_a}{T_0^{opt}}\right) \cdots (1\text{-}3)$$

を満足する．(1.2) より (1.3) を引いて整理すれば，

$$\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty,\,max} - \eta_{ex}^{max} = F' \frac{S_p U}{S_r I(1 - T_a/T_s)} \sqrt{T_c{}^m T_a} \left(\frac{\sqrt{T_c{}^m T_a}}{T_o^{opt}} + \frac{T_o^{opt}}{\sqrt{T_c{}^m T_a}} - 2 \right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}4)$$

となり，$\sqrt{T_c{}^m T_a}/T_o^{opt} + T_o^{opt}/\sqrt{T_c{}^m T_a} \geq 2$ を考慮すれば，

$$\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty,\,max} \geq \eta_{ex}^{max}$$

$$\text{：等号は } T_o^{opt} = \sqrt{T_c{}^m T_a} \text{ の時成立} \cdots (1\text{-}5)$$

である事がわかる．この事から，最高瞬時エクセルギー効率 $\eta_{ex}^{m,\,max}$ は，$T_o^{opt} = \sqrt{T_c{}^m T_a}$ の時に与えられ，

$$\eta_{ex}^{m,\,max} = F' \frac{S_p U}{S_r I} \frac{(\sqrt{T_c{}^m} - \sqrt{T_a})^2}{1 - T_a/T_s}$$

$$: T_o^{opt} = \sqrt{T_c{}^m T_a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}6)$$

となる．この値は，Bejanら[4)]及び藤原ら[5)]の結果と一致するが，この式は出口温度により決定されたものである．ところで，この $T_o^{opt} = \sqrt{T_c{}^m T_a}$ の条件では，後で示される (2-1) が∞に発散する事になる．

* 上智大学理工学部物理学教室
Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Sophia Univ.

$T_o^{opt}=\sqrt{T_c^mT_a}$ において dT_o^{opt}/dT_i が有限値に確定する為には，$\dot{m}\to\infty$ で $T_o^{opt}\to T_i$ である事が要請される事から，この時 $T_i=\sqrt{T_c^mT_a}$ でなければならない．

2） η_{ex}^{max} の入口温度依存性について

η_{ex} 曲線は，日射 I，熱媒体入口温度 T_i などによって変化するが，ここでは 1）と同様に I 及び T_a を一定として取り扱い，$T_i<T_c^m$ とする．(24) の両辺を T_i で微分して整理すれば

$$ln\left(\frac{T_c^m-T_i}{T_c^m-T_o^{opt}}\right)\frac{dT_o^{opt}}{dT_i} =\frac{T_o^{opt}}{T_i}\,\frac{T_o^{opt}-T_i}{T_c^m-T_i}\,\frac{T_aT_c^m-T_o^{opt}T_i}{T_aT_c^m-T_o^{opt2}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}1)$$

となる．ここで．$ln\left(\frac{T_c^m-T_i}{T_c^m-T_o^{opt}}\right)$，$T_o^{opt}/T_i$，及び $\frac{T_o^{opt}-T_i}{T_c^m-T_i}$ は全て正であるので（∵ $T_c^m>T_o>T_i$），右辺の最後の項について入口温度 T_i の２つの領域，即ち，$T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ 及び $T_i\geq\sqrt{T_c^mT_a}$ に対して考察する．尚，$\dot{m}\to\infty$の場合，(2-1)で $T_o^{opt}\to T_i$ の極限をとれば，$\lim_{T_0^{opt}\to T_i} dT_o^{opt}/dT_i=1$ となる事がわかる．これは，T_i の上昇に伴なって $\dot{m}\to\infty$ に於ける T_o^{opt} が上昇する事を示している．この事は $T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ の時にも成り立つが，$T_o^{opt}>T_i$ を考慮して (27) の η_{ex}^{max} と $\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty}$ を比較すれば，$\eta_{ex}^{max}>\eta_{ex}^{\dot{m}\to\infty}$ を示す事ができる．故に，以下の考察の $T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ の領域では，η_{ex}^{max} を対象としたものである．尚，(2-1) で，$dT_o^{opt}/dT_i=0$ となるのは $T_o^{opt}=T_c^mT_a/T_i$ の時のみである．

ⓐ $T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ の場合

先ず $T_o^{opt}>\sqrt{T_c^mT_a}$ を証明する．$\gamma-T_o$ 曲線を考え，(23) に於ける $d\gamma/dT_o\big|_{T_o=\sqrt{T_c^mT_a}}>0$ であれば，$T_o^{opt}>\sqrt{T_c^mT_a}$ が証明された事になる．即ち，

$$\frac{d\gamma}{dT_o}=\frac{(1-T_a/T_o)(T_c^m-T_o)\,ln\left(\frac{T_c^m-T_i}{T_c^m-T_o}\right)-(T_o-T_i-T_a\ln T_o/T_i)}{\left\{ln\left(\frac{T_c^m-T_i}{T_c^m-T_o}\right)\right\}^2}$$

であり，分母 ≥0（等号は $T_o\to T_i$）である事から，その分子を q と置き，($T_i\leq T_o\leq T_o^{opt}$) の範囲でその増減を調べる．この時増減表は，

T_o	T_i		$\sqrt{T_c^mT_a}$		T_o^{opt}
dq/dT_o	0	+	0	−	−
q	0，凹	↗	凸	↘	0

となる．ここで，$dq/dT_o\big|_{T_o=T_o^{opt}}<0$ は，$q(T_o^{opt})=0$ 及び dq/dT_o の根が $T_o=T_i$ と $T_o=\sqrt{T_c^mT_a}$ しか存在しない事より明らかである．上表より，$T_o=\sqrt{T_c^mT_a}$ の時に $q>0$ であり，結局 $d\gamma/dT_o\big|_{T_o=\sqrt{T_c^mT_a}}>0$ が導かれた．故に，

$T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ で $\sqrt{T_c^mT_a}<T_o^{opt}$

が証明された．尚，$T_i\geq\sqrt{T_c^mT_a}$ の領域では，$T_i<T_o$ より $T_o^{opt}>\sqrt{T_c^mT_a}$ は明らかである．

(2-1) より，$T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ の領域では，

① $T_aT_c^m<T_o^{opt}T_i$ かつ $T_aT_c^m<T_o^{opt2}$
　ならば $dT_o^{opt}/dT_i>0$

② $T_aT_c^m>T_o^{opt}T_i$ かつ $T_aT_c^m<T_o^{opt2}$
　ならば $dT_o^{opt}/dT_i<0$

のどちらかが成立している事になる．先ず，T_i を $T_i=T_a$ より増加させてゆく事を考えれば，その最初に於いて①が成立しない事は明白である（∵ $T_c^m>T_o^{opt}$）．しかし，T_i が $\sqrt{T_c^mT_a}$ に近づいた時に①が成立しないという事は，$T_i, T_o^{opt}, \sqrt{T_c^mT_a}$ の大小関係からは明らかにされない．ここで，①，②の条件をまとめて，

①′ $T_c^mT_a/T_o^{opt}<T_i<\sqrt{T_c^mT_a}<T_o^{opt}$
　ならば $dT_o^{opt}/dT_i>0$

②′ $T_i<T_c^mT_a/T_o^{opt}<T_o^{opt}$
　ならば $dT_o^{opt}/dT_i<0$ ……………(2-3)

と書き変える．この両者が同時に成立する事は有り得ない．そこで，$T_a\leq T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ の領域で，ある T_i の時に②′から①′に移るものと仮定する．ここで，(24) の式より，

$$F(T_o)\equiv T_o-T_i-T_a ln\left(\frac{T_o}{T_i}\right)-(T_c^m-T_o)(1-T_a/T_o)\,ln\left(\frac{T_c^m-T_i}{T_c^m-T_o}\right)$$

と置く．ここで，$F(T_o)=0$ の時の解が T_o^{opt} である．②′から①′への遷移点では $T_o^{opt}=T_c^mT_a/T_i$ が成立する筈であり，$T_i<\sqrt{T_c^mT_a}$ の条件で $F\left(\frac{T_c^mT_a}{T_i}\right)=0$ となる様な T_i が存在しなければならない．ここで，$F\left(\frac{T_c^mT_a}{T_i}\right)\equiv G(T_i)$ と置き，この $G(T_i)$ を T_i で微分すれば，

$$\frac{d}{dT_i}G(T_i) =(1-T_c^mT_a/T_i^2)\,ln\left(\frac{T_c^m-T_i}{T_c^m-T_c^mT_a/T_i}\right)$$

であり，極値は $T_i=\sqrt{T_c^mT_a}$ のみである．又，$T_i\lessgtr\sqrt{T_c^mT_a}$ では $\frac{d}{dT_i}G(T_i)<0$ である．更に，$G(\sqrt{T_c^mT_a})=0$ である事から，$G(T_i)=0$ の解は $T_i=\sqrt{T_c^mT_a}$ の時にのみ与えられ，この時

$T_o{}^{opt}=T_c{}^mT_a/T_i=\sqrt{T_c{}^mT_a}$ でなくてはならない．即ち，②′から①′の遷移点は $T_i=\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の時のみで，$T_i<\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域では常に②又は②′が成立している．②′の条件を (2-1)の最後の項に適用する事により，

$$T_i<\sqrt{T_c{}^mT_a} \text{ の時 } \frac{dT_o{}^{opt}}{dT_i}<0\cdots \quad (2\text{-}4)$$

である事がわかる．即ち，$T_i<\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域で入口温度を上昇させれば，それに従って最適出口温度 $T_o{}^{opt}$ が減少する事が示された．

ⓑ $T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の場合

この条件と $T_o{}^{opt}>T_i$ より，

$$T_o{}^{opt}>\sqrt{T_c{}^mT_a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}5)$$

であり，$T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の条件より (2-5) に掛け合わせて整理すれば，$T_i>T_c{}^mT_a/T_o{}^{opt}$ が導かれる．まとめれば，

$$\frac{T_c{}^mT_a}{T_o{}^{opt}}<T_i<T_o{}^{opt} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}6)$$

が得られ，先と同様に (2-1) に適用する事により，

$$T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a} \text{ の時 } \frac{dT_o{}^{opt}}{dT_i}>0 \quad (2\text{-}7)$$

となる事がわかる．即ち，$T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域では，T_i を上昇させる事により $T_o{}^{opt}$ も上昇する事が示された．

次に，η_{ex} 曲線について調べてみる．横軸に出口温度 T_o，縦軸に η_{ex} のグラフを考える．$T_i<T_o<T_c{}^m$ の間に η_{ex} がピークを持ち，その時の出口温度を $T_o{}^P$ とする．この $T_o{}^P$ は (24) を満足していなければならず，その時の $\eta_{ex}^{T_o{}^P}$ は (27) により与えられる．

点 (T_i，$\eta_{ex}^{T_i}$)，(T_o^P，$\eta_{ex}^{T_o{}^P}$) を結ぶ直線の傾きを S とすれば，

$$S=\frac{\eta_{ex}^{T_o{}^P}-\eta_{ex}^{T_i}}{T_o{}^P-T_i} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}8)$$

で与えられる．(27) 及び (1-1) を代入して整理すれば，

$$S=\frac{F'S_pU}{S_rI(1-T_a/T_s)}\cdot\frac{T_c{}^mT_a-T_iT_o{}^P}{T_iT_o{}^P} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}9)$$

となる．

$T_i<\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の時，(2-3) より $T_c{}^mT_a>T_iT_o{}^P$ である事から，$S>0$ である事がわかる．この事は，$T_i<\sqrt{T_c{}^mT_a}$ に於いて $T_i<T_o<T_c{}^m$ の間にピークが存在する事を約束する．

$T_i>\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の時，(2-6) より $T_c{}^mT_a<T_iT_o{}^P$ である事から，$S<0$ でなければならない．この事は，$T_i>\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域でも，$T_i<T_o<T_c{}^m$ の間に(24)を満たす $T_o{}^{opt}$ が存在したとしても最大エクセルギー効率は $\dot{m}\to\infty$ の時に与えられる事を示している．

次に，$T_i>\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域では．$\dot{m}\to\infty$ 以外に(24)を満たすべき $T_o{}^{opt}$ が存在しない事を証明する．尚，$T_i=\sqrt{T_c{}^mT_a}$ で $\dot{m}\to\infty$ の時，$S\to0$ となる．

$T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域で，$\dot{m}\to\infty$ の時以外に(24)を満たす $T_o{}^{opt}$ が $T_i<T_o{}^{opt}<T_c{}^m$ の間に存在すると仮定し，それを T_{o1}^{opt} と置く．この時，$S<0$ でなければならない事，及び $\dot{m}=0$ で $\eta_{ex}=0$ となる事から，必ずもう1つの極値を持たなければならず，この時の T_o も (24) を満足しなければならない．この温度を T_{o2}^{opt} とすれば，

$$\sqrt{T_c{}^mT_a}\leq T_i<T_{o2}^{opt}<T_o^{opt}\cdots \quad (2\text{-}10)$$

と仮定する事ができる．この $\dot{m}\to\infty$ 以外の極値を η_{ex1}，η_{ex2} と各々置けば，先の議論より，

$$\eta_{ex1}>\eta_{ex2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}11)$$

である．(27) を使って両者の差をとって整理すれば，

$$\eta_{ex1}-\eta_{ex2}=\frac{F'S_pU}{S_rI(1-T_a/T_s)}(T_{o1}^{opt}-T_{o2}^{opt})\left(\frac{T_c{}^mT_a}{T_{o1}^{opt}T_{o2}^{opt}}-1\right)$$

となる．ところで (2-10) の条件より，

$$T_c{}^mT_a/T_{o1}^{opt}T_{o2}^{opt}<1$$

が導かれるので，

$$\eta_{ex1}<\eta_{ex2}$$

となる．これは (2-11) と明らかに矛盾するので $T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域では，$\dot{m}\to\infty$ 以外に (24) を満足するような $T_o{}^{opt}$ は存在しない事になる．この事は，極値が複数個存在する場合でも当てはめる事ができる．

この事より，(2-7) に於ける条件は $\dot{m}\to\infty$ の時のものであり，$T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の時には $dT_o{}^{opt}/dT_i=1>0$ とならなければならない事がわかる．又，この事は $T_i\geq\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域では η_{ex} が単調減少関数である事も示している．

以上の事を全てまとめると，$T_i<\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の領域では，$T_i<T_o<T_c{}^m$ の間で η_{ex}^{max} のピークが存在し，T_i が上昇するに従いそのピークは T_i に近づく．そして，$T_i=\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の時にそのピークは $\dot{m}\to\infty$ の時 η_{ex} のと一致し，$T_i>\sqrt{T_c{}^mT_a}$ では $\dot{m}\to\infty$ の時の η_{ex} が η_{ex}^{max} として与えられ，T_i の上昇と供に $T_o{}^{opt}(\to T_i)$ も上昇する．この時，η_{ex} 曲線は T_o 等の温度軸に対して単調減少関数となる．T_i もパラメーターとしたエクセルギー効率の最高値は $T_i=\sqrt{T_c{}^mT_a}$ の時の $\dot{m}\to\infty$ の状態で達成され，どの場合の η_{ex}^{max} もこの値を越える事はできない．

（昭和57年11月8日　原稿受理）