

気象モデルによる日射予測

その2：カルマンフィルターによる予測の高精度化

Solar irradiance forecasting using a mesoscale meteorological model

Part II: Increasing the accuracy using the Kalman filter

嶋田 進¹

Susumu SHIMADA

小林 智尚⁴

Tomonao KOBAYASHI

劉 媛媛²

YuanYuan LIU

和澤 良彦⁵

Yoshihiko WAZAWA

吉野 純³

Jun YOSHINO

Abstract

The authors have developed a solar irradiance forecasting system using the WRF (Weather Research and Forecasting) model, developed by NCAR and NCEP. Comparison with observations in our previous study has shown that the WRF-simulated GHI (Global Horizontal Irradiance) includes not only large RMSEs (Root-Mean-Square-Errors) but also positive biases. In order to increase the accuracy of the WRF-simulated GHI, the Kalman filter, which is a statistical approach to reduce biases, is used as a post-processor. The Kalman filter with a simple system model using only the observed and simulated GHI is applied to derive time adaptive regression coefficients. As a result the positive bias in the simulated GHI is found to be improved considerably by using the Kalman filter, leading to improve the RMSE. Moreover the impact of the Kalman filter on the error distribution is finally discussed.

キーワード：日射予測，WRF，カルマンフィルター，信頼区間

Keywords: Solar irradiance forecasting, WRF, Kalman filter, Confidence interval

1. はじめに

著者らは、一日二日先における高精度な太陽光発電の出力予測を実現するため、メソ気象モデル WRF (Weather Research and Forecasting)¹⁾を用いた日射予測システムを開発している^{2), 3)}。本研究では、「気象モデルによる日射予測：その1」³⁾として、WRFによる日射予測システムの概要を示すとともに、中部電力により実施されている61地点における日射観測値(経済産業省補助事業)を用いて計算精度を定量的に検証した。その結果、単一地点の当日および翌日予測の年間バイアスの61地点平均値は75.4および75.9 W/m²、RMSE (Root-Mean-Square-Error) は189.2および199.7 W/m²であった。また、空間平滑化効果を考慮した場合にはRMSEは大幅に改善されることがわかった。

本稿は「その1」の続きとして、WRFによる日射予測の高精度化を図るため、計算値に含まれる正のバイアス改善を試みるものである。気象モデルの計算値を観測値と比較した場合には、空間解像度が不十分なことにより局所的な影響を完全には考慮できないことやモデル化の不備のために通常バイアスを含んでいる。そのため気象モデルのアウト

プットを利用する際には、バイアス補正のために計算の後処理(ポストプロセス)が実行される。このポストプロセスでバイアスを取り除く手法には、回帰分析や予測誤差の機械学習によって逐次的に補正係数を算出する方法がある⁴⁾。これらの方法のうち、本研究では工学分野において実績が豊富でアルゴリズムが比較的明快なため実装が容易なカルマンフィルター⁵⁾を用いる。

カルマンフィルターと類似する統計モデルによる日射予測手法としては、重回帰分析⁶⁾、ニューラルネットワーク⁷⁾や最近ではサポートベクターマシン⁸⁾による手法などが提案されている。これらの研究におけるそれぞれのモデルの位置付けは、日射量以外の気象パラメータから日射量を予測するための変換器としての役割を担うものである。それに対して、本研究におけるカルマンフィルターでは、既に得られている日射量のバイアスを改善することに主眼が置かれていると言う点で若干目的が異なる。つまりあくまで著者らの研究における主体は気象モデルによる日射予測である。本稿では、カルマンフィルターの概要および精度改善効果について示すと同時に、予測誤差の分布から推定する計算精度の信頼区間についても併せて議論する。

2. 観測値およびWRF計算値

「その1」³⁾では、中部電力管内を対象として2011年におけるWRFの48時間先までの日射予測計算を実施し、観測値を用いて計算精度を検証している。カルマンフィルタ

*1 岐阜大学工学研究科特任助教 (〒501-1193 岐阜市柳戸 1-1)
e-mail: sshimada@gifu-u.ac.jp

*2 岐阜大学工学研究科大学院生

*3 岐阜大学工学研究科准教授

*4 岐阜大学工学研究科教授

*5 中部電力株式会社 技術開発本部 電力技術研究所
(原稿受付：2013年2月9日)

一によるポストプロセスも含めた予測精度の検証にはここで得られた観測値およびWRF計算値(当日予測, 1時間毎)を使用する。また, 電力需給調整のための日射予測では, 単一地点の予測値よりも空間平均値の方が重要であるため, 中部電力管内で人口の多い名古屋市・中部電力技術研究所を中心とした半径50 kmの範囲の空間平均値をカルマンフィルターに入力する時系列とした。Fig. 1の白丸は中部電力による日射観測地点, クロスは円の中心位置をそれぞれ示す。図中の円内に含まれる34地点の観測値およびWRF計算値よりそれぞれ地点平均時系列を算出した。観測値およびWRF計算値の詳細については、「その1」を参照されたい。

3. カルマンフィルターを用いたポストプロセス

WRF計算値に含まれる正のバイアスを補正するため, 日射予測サイクルの計算終了時点(7:00JST)において(「その1」のFig. 2参照)以下に示すカルマンフィルターによるポストプロセスを組み込む。

3.1. カルマンフィルターの概要

カルマンフィルターは時系列からノイズを除去するための濾過器の一種である。気象の分野では観測値を用いて計算値に含まれるバイアスを除去する手法としてしばしば用いられており, 気象庁では天気予報ガイダンス(降水量, 降水確率, 気温)の作成手法として採用されている⁹⁾。ここで, バイアス除去のために補正係数を算出すると言う点では回帰分析による手法と類似するものの, 回帰分析では有効な補正係数を算出するためには少なくとも通年の計算値および観測値の時系列が必要になることに対して, カルマンフィルターでは数週間のデータの蓄積さえあれば逐次的に最適な補正係数が得られる点に大きな違いがある。そのため, 予報システム中の気象モデルに変更が加えられる度に, 通常回帰分析のようにデータの一定期間の蓄積を待つ必要が無いというメリットがある。

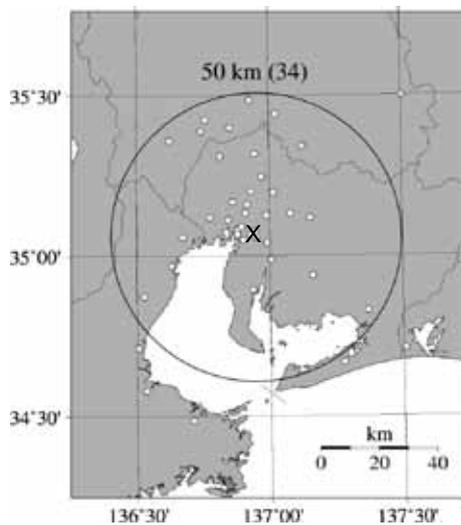


Fig. 1 Locations of observational sites

Fig. 2はカルマンフィルターの計算フローを示している。ここで, \hat{x} はカルマンフィルターを用いて求めたいシステム状態量, z は観測値, P は誤差の共分散行列, K はカルマンゲイン, A および H はシステムモデル, Q および R はシステム状態量および観測値に含まれるノイズの共分散行列である。システム状態量は列ベクトル, 観測値はスカラーおよびそれ以外の変数は行列である。下付き添え字 k は演算回数が k ステップ目であることを表し, 上付き添え字 T は転置行列および $-$ は演算の中で暫定的に使用される一時的な変数であることを意味している。

ここで第一ステップ目 ($k=1$) のフローを追跡してみる。まず計算のスタートとして, システム状態量 \hat{x} および誤差の共分散行列 P の初期値をそれぞれ設定する。ここで即座に初期値にはいったい何を与えれば良いのかという疑問が生じるが, カルマンフィルターでは, 繰り返し演算するうちにアルゴリズム内で使用される変数は適切な値へと徐々に自動調節されていくため, 実際の演算開始時には \hat{x} および P の初期値としてゼロベクトルおよび単位行列のような適当な値を与えても大きな問題は生じない。

初期値の設定が済んだら, 次に \hat{x} および P の初期値から変換行列 A およびシステム状態量のノイズ Q を用いて

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^- &= A\hat{x}_0 \\ P_1^- &= AP_0A^T + Q \end{aligned} \quad (1)$$

により第一ステップにおける \hat{x} および P を一時的に推定する。さらにこの P の一時推定値, H および R を用いて

$$K_1 = P_1^- H^T (HP_1^- H^T + R)^{-1} \quad (2)$$

より, カルマンゲイン K を決定する。ここで得られた K および観測値 z を用いて

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^- + K_1(z_1 - H\hat{x}_1^-) \quad (3)$$

により第一ステップで暫定値となっていたシステム状態量 \hat{x} を更新する。同様に,

$$P_1 = P_1^- - K_1HP_1^- \quad (4)$$

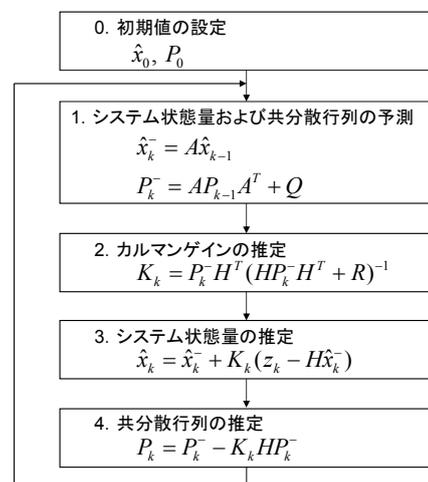


Fig. 2 Kalman filter algorithm

により第一ステップの誤差の共分散行列 P を決定する。式 (3) および (4) で得られた \hat{x} および P を次のステップ ($k=2$) における \hat{x} および P の一時推定に使用する。実際に、過去の観測値および計算値の時系列がそれぞれ n 時間分使用できる場合には、求めたいシステム状態量を求めるためにこの演算を n 回繰り返すことになる。

3.2. システムモデルの設定

カルマンフィルターを用いてシステム状態量 \hat{x} を算出するための一連の行列演算は Fig. 2 に示したとおりで、フィルターの設計者はシステムモデル A および H とシステム状態量および観測値に含まれるノイズの共分散行列 Q および R を設定し、式 (1) ~ (4) の演算を繰り返せば自動的にシステム状態量を取得することができる。

本研究では、WRF 計算値を一次式で補正するための係数を最終的に求めたいシステム状態量としてシステムモデルを設定した。具体的にはシステムモデル A および H は、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H &= (I_{WRF}, 1) \end{aligned} \quad (5)$$

である。ここで I_{WRF} は WRF 計算値である。求めたいシステム状態量を一次式の係数列ベクトル

$$\hat{x}_k = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (6)$$

として、カルマンフィルターを適用した後の WRF 計算値 \hat{I}_{WRF} を変換行列 H とシステム状態量 \hat{x} の積で表現すると

$$\begin{aligned} \hat{I}_{WRF} &= H\hat{x}_k \\ &= (I_{WRF}, 1) \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = aI_{WRF} + b \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

システムモデル A および H を決定すれば残りの設定項目はシステム状態量および観測値のノイズの共分散行列 Q および R のみである。これらの二つの変数はシステム状態量を最適化する際に両者の比率から現在と過去の予測誤差のどちらに重みを与えるかを決定する変数でカルマンゲ

イン K の計算に影響する。例えば、 Q を一定値として R を大きくすると K は相対的に小さくなり、結果として、求められるシステム状態量は現在から近いデータの予測誤差の影響を強く反映する。逆の場合は、より過去に遡った予測誤差の影響を重視した結果になる。

Q および R はシステムモデルや使用する時系列の特性に依存するため解析的に最適値を得ることは通常不可能である。しかしカルマンフィルターにおいて Q および R は必要不可欠な設定パラメータであるため実際には試行計算の結果をもとに決定される。今回は Q および R の値を $10^0 \sim 10^{20}$ の区間についてそれぞれ $10^{0.5}$ 刻みで設定し、繰り返した計算結果について RMSE をそれぞれ算出した (Fig. 3)。この 21×21 通りのケースのうちで RMSE が最も小さくなる組合せ ($Q = 1 \times 10^0, R = 1 \times 10^{10}$) を予め探索してそれぞれ設定している。なお、カルマンフィルターを実装するための具体的な手引きとしては Kim (2011)¹⁰⁾ が参考になる。

4. バイアスおよび RMSE の改善

Fig. 4 はカルマンフィルターを通して得られるシステム状態量 (補正係数) の時系列である。2011 年 1 月~12 月の期間において、前日までの観測値および WRF 計算値を用いて 3.2 節で示したシステムモデルを含むカルマンフィルターを適用し、WRF 計算値を式 (7) で補正するための係数 a および b (システム状態量) を日毎に予測した。計算開

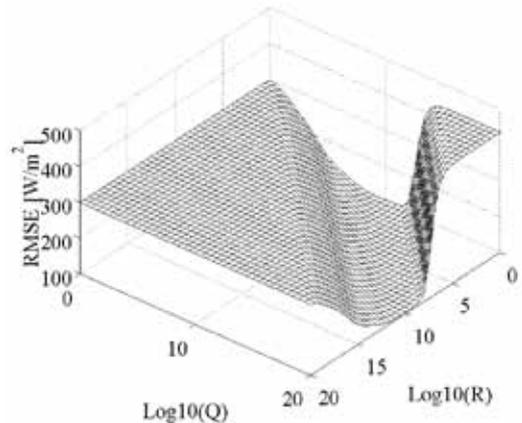


Fig. 3 Annual RMSEs of WRF-KF with varying Q and R

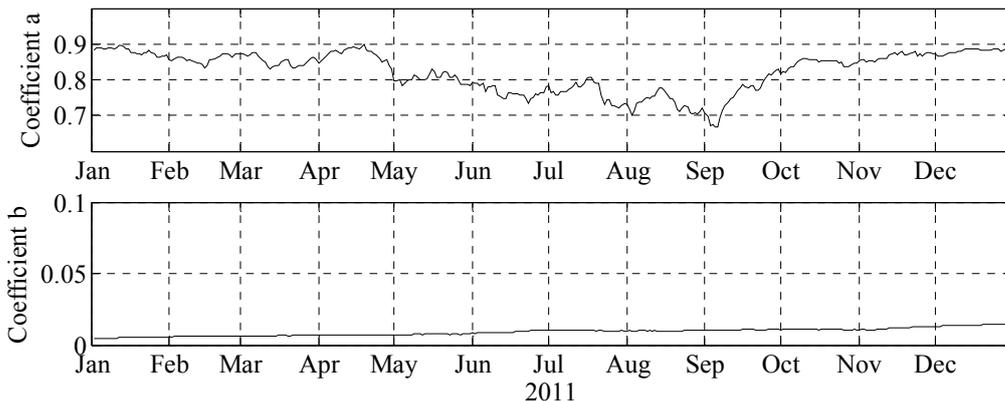


Fig. 4 Time series of daily state variables obtained from the Kalman filter in the year 2011

始の1月1日時点での内部変数を予め調整するため、ここではカルマンフィルターの助走計算として一年間の繰り返し計算を行った後のそれぞれの変数を初期条件として与えている。

Fig. 4の a および b は WRF 計算値に含まれるバイアス補正のため乗数および定数項である。図より、カルマンフィルターから得られるシステム状態変数は長期的に変化するだけでなく日々微調整されていることがわかる。 a の値は計算スタート時の1月に約0.9であったものが季節を追う毎に緩やかに減少し続け、9月初旬には0.7を下回る値まで小さくなる。逆にそこからは短期間で値が回復し、12月中旬には1月での値とほぼ同程度に戻る。この長期的な変化はももとの WRF 計算値に含まれるバイアスの季節変化と関連している。またここで注目すべきは、4月や8月のように10日前後で値が0.1も急変する期間があることである。これはカルマンフィルターが気象の変化によって変動する誤差の傾向を学習しながら補正係数を日々調整している結果である。また、係数 a の値は結果に線形で作用するため、カルマンフィルターによる補正は WRF 計算値にかなり大胆に修正を加えるものであることがわかる。また、 b については a と同様に一定値とはなっていないものの、その値自体が a に比べて1~2桁小さい値である。つまり今回の適用したフィルターでは定数項の寄与は無視できるほど小さい。

日毎の補正係数 (Fig. 4) を WRF 計算値 (当日予測, 34地点平均値) に適用し、観測値と比較することでカルマンフィルターによる精度改善効果について検討する。Fig. 5は2011年における34地点平均値の持続モデル (Persistent), WRF 計算値 (WRF) およびカルマンフィルター適用後の WRF 計算値 (WRF-KF) の月毎および年間の (a) バイアスおよび (b) RMSE (単位: W/m^2) である。持続モデルは前日の観測値を当日予測値としてそのままスライドした予測結

果である。

まず、カルマンフィルターによるバイアスの改善効果について WRF および WRF-KF の比較から見てみると、カルマンフィルターを適用することによって年間の値だけではなく月毎に関しても WRF 計算値に含まれる正のバイアスはほぼ除去されていることがわかる。ここで仮に単純に年間で一律の補正係数を適用した場合には、年間バイアスは補正できたとして月毎の値を同時に調整することはできない。つまり Fig. 5 (a) の結果は、ポストプロセスとして自動的に最適な補正係数を逐次導出できるカルマンフィルターの使い勝手の良さを端的に示した結果であると言える。

さらに、WRF から WRF-KF の間での RMSE の値の変化を見てみると、バイアスが補正されることにより年間 RMSE は $43 W/m^2$ (29%) 改善されている。RMSE の定義式に帰れば RMSE はバイアスの関数にもなっているから¹¹⁾、バイアスが補正されれば RMSE もそれによって改善される。参考値として示した持続モデルと WRF-KF を比較してみると、WRF-KF の年間 RMSE は持続モデルのその約半分である。つまり、非常に単純な予測手法に比べると、WRF とカルマンフィルターを組み合わせた日射予測は精度の面で十分アドバンテージがあり、計算コストが大きく掛かることを差し引いても十分有効な手法であると言える。

5. 予測誤差分布と信頼区間

カルマンフィルターによるポストプロセスの効果は単なるバイアスおよび RMSE の改善のみにとどまらない。Fig. 6は2011年における予測誤差 (WRF 計算値 - 観測値) の出現頻度分布を示している (棒グラフ)。ここで (a) は WRF の単一地点、(b) は WRF の34地点平均、(c) は WRF-KF (WRF の34地点平均にカルマンフィルターを適用) から得られた予測誤差の出現頻度である。単一地点の予測誤差分

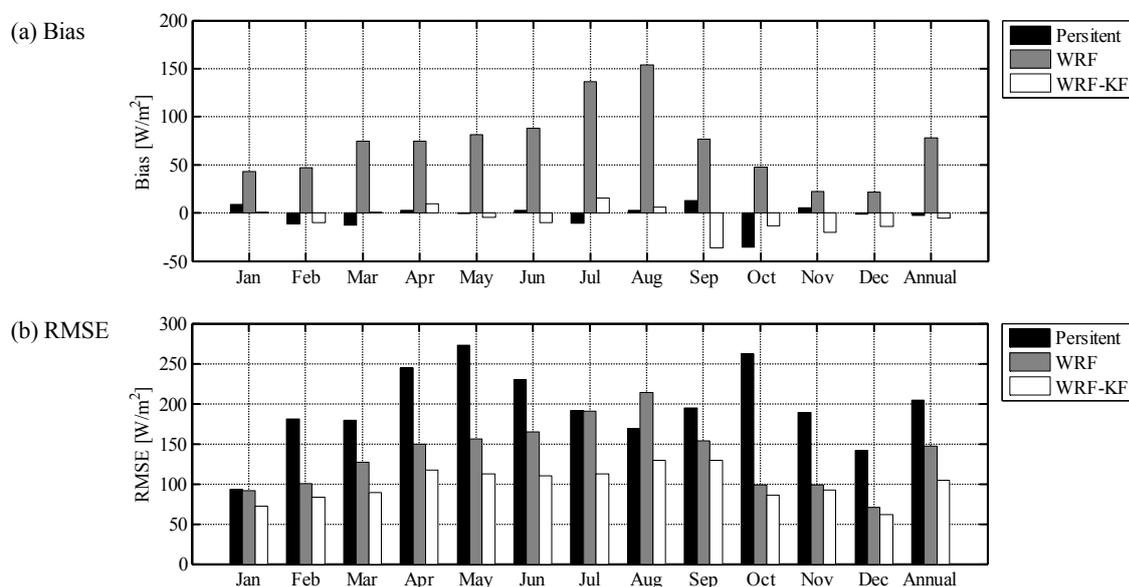


Fig. 5 Monthly and annual (a) biases and (b) RMSEs of the persistent model, WRF and WRF with the Kalman filter in 2011

布は 34 地点平均の中心地点である中部電力・電力技術研究所 (Fig. 2 中のクロス) での分布である。図中左上の数字は予測誤差の平均値および標準偏差である。まず (a) および (b) を比較してみると、空間平均の効果によって誤差分布の広がりが小さくなり (標準偏差の値が小さくなり)、誤差分布の形状は図中実線で示した正規分布 (ガウス分布) に近づいている様子が見て取れる。ちなみに無相関の時系列同士の重ね合わせの出現分布は正規分布で近似できる性質があり、これは中心極限定理と呼ばれている。

ここで誤差の分布形状に注目する理由は、もし誤差の分布が正規分布等のよく知られた関数形で表現出来るようになれば、そこから予測値の情報に加えて信頼区間が推定出来るようになるからである¹²⁾。例えば、予測誤差分布が正規分布である場合、一般的に良く知られているように任意の予測誤差の値がその標準偏差 $\pm 1\sigma$ の範囲内に含まれる確率は 68.3% ; $\pm 2\sigma$ なら 95.5%であると仮定できる。つまり、予測誤差の分布形状とそれを記述するための統計値が予め把握できていれば予測値そのものの情報だけでは無く予測値の信頼性に関する確率的な議論まで展開出来るようになる。

誤差の出現確率がわかれば、WRF による日射予測の価値をさらに向上させることができる。そもそも気象予報は不確実な情報で¹³⁾、それを理解したうえで利用した方がその価値を効率よく引き出すことができる。予測値のみに注目する場合には当たり外れの 2 値的な情報としてしか意味を持たないので、例えば需給計画の際には太陽光発電による出力が多いか少ないかの目安になる程度であろう。それに対して、予測値に信頼区間が付加されていれば実際に日射 (発電量) が取り得る範囲を合理的に設定できるわけであるから、需給運用によって生じる利益 (損失) を最大化 (最小化) するような意思決定の判断材料となり得る。

そうした視点で Fig. 6 を改めて見てみると、(a) の単一地点の誤差分布に比べれば、(b) の 34 地点平均はかなり正規分布に近い形状になっていることがわかる。しかし、Fig. 6 (a) および (b) では平均値そのものが $+75 \text{ W/m}^2$ 前後の正に位置するだけではなく、出現頻度全体が正側に若干偏った分布をしている。正規分布以外への関数形へのフィッティングや信頼区間の設定を考える場合には、平均値がゼロ付近にないことや左右非対称の分布形状は非常に扱いが難しくなる。

それらに比べると、(c) WRF-KF の分布は、誤差の広がりが小さくなると同時にその分布がゼロ付近の平均値を中心としたほぼ左右対称の形状になっていることがわかる。しかもこの誤差の分布形状は図中にも示しているように式 (8) の確率密度関数で表されるロジスティック分布¹⁴⁾で都合良く近似することが出来る。

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right) / s \left(1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)\right)^2 \quad (8)$$

ここで μ は平均値および s はスケールパラメータ ($=\sqrt{3}\sigma/\pi$) である。また同様に、その累積分布関数は、

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh\left(\frac{x-\mu}{2s}\right) + 1 \right\} \quad (9)$$

である。平均値周りの出現確率 ($\mu = 0$) を考えてみると

$$\int f(x) dx = F(x) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh\left(\frac{x}{2s}\right) + 1 \right\} \quad (10)$$

になるから、ロジスティック分布において予測誤差が $\pm 1\sigma$ の範囲内に含まれる確率は解析的に 72.0% ; $\pm 2\sigma$ なら 94.8%であることが求められる。つまり、WRF-KF の予測値と予測誤差の標準偏差が得られている場合、その予測値が観測値から $\pm 1\sigma$ の誤差の範囲内で収まっている確率は約 70%であると期待できるようになる。

最後にこの抽象的な信頼区間の議論について具体例を挙げて説明する。Fig. 7 は 2011 年 2 月第一週目の観測値および WRF-KF の時系列を白丸および実線でそれぞれ示し、加えて点線で WRF-KF から $\pm 1\sigma (= 104.3 \text{ W/m}^2)$ の範囲を表示

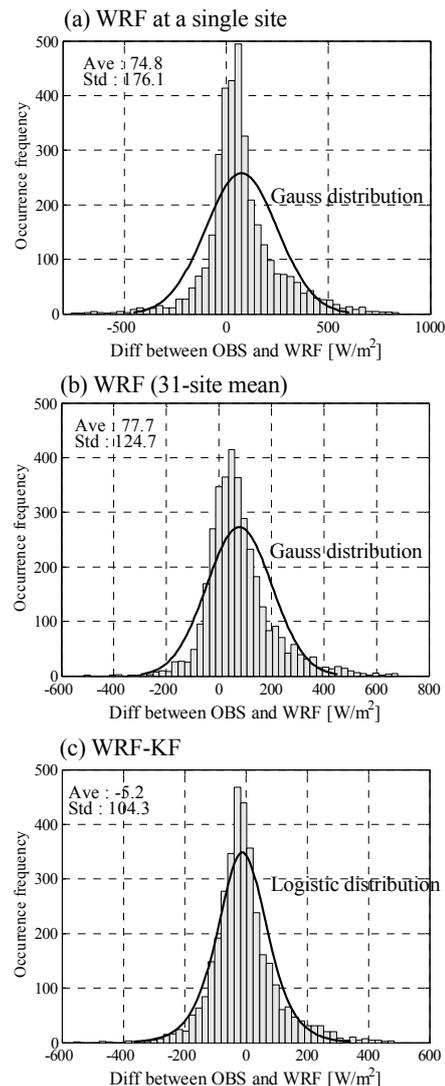


Fig. 6 Occurrence frequency of error distributions

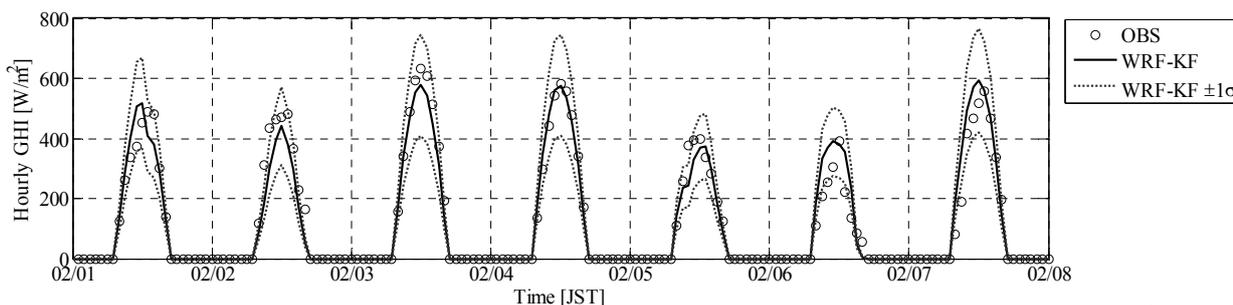


Fig. 7 Time series of hourly OBS and WRF-KF with the confidence interval of 72 % for the period from Feb 1st to 8th, 2011

している。標準偏差の値を予測値に直接加算および減算して描くと夜間や日の出および日の入り付近の範囲は物理的にあり得ないゼロ以下の数値になってしまうため、ここでは、標準偏差を計算平均値で一度規格化し、各時刻の値に比例する範囲に変換した値を表示している。この図より、WRF-KFによる予測が観測値と完全に一致していると言えるのはこの1週間において2月4日のみである。しかしながら、その他の日に関しては観測値は72%信頼区間の範囲内に基本的に収まっていることが確認できる。つまり、WRF計算値にカルマンフィルターを適用する予測手法は、日射量の絶対値の予測に関しては精度改善の余地があるものの、幅を持った予測として利用することを考えれば太陽光発電の出力予測において有益な情報となり得ることが期待できる。

6. 結語

本研究はメソ気象モデル WRF の計算値にカルマンフィルターを適用することにより予測精度の改善を試みた。加えて、予測誤差分布の解析から予測値の信頼区間についても議論した。本研究で得られた主要な結論を以下にまとめ結語とする。

1. カルマンフィルターから得られるシステム状態量の時系列より、WRF 計算値に乗じる補正係数は相対的に冬季に大きく夏季に小さい。これは WRF 計算値に含まれるバイアスの季節変化に関連している。
2. WRF 計算値にカルマンフィルターを適用することで、WRF に含まれる正のバイアスは改善することが出来る。補正係数を逐次自動的に最適化するため、年間のバイアスだけでなく月毎のバイアスも調整できる。
3. カルマンフィルターを適用することでバイアスが改善されるだけでなく、RMSE も同時に改善される。フィルター適用前と比較して、年間の RMSE は 43 W/m^2 (29%) 改善される。
4. 持続モデルによる日射予測の精度と比較するとカルマンフィルター適用後の WRF の RMSE は約半分である。すなわち単純な予測手法と比較して、計算コストを加味しても WRF およびカルマンフィルターを併用する予測は精度の面でアドバンテージがある。

5. 予測誤差分布の解析結果より、カルマンフィルター適用後の WRF 計算値の誤差分布はロジスティック分布で近似できる。予測誤差の平均値および標準偏差を算出すれば予測値が取り得る範囲 (信頼区間) をその確率を含めて予測値に付与することが出来る。

謝辞

本論文の改稿の際には匿名の査読者2名より有益なご指摘およびコメントを賜った。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Skamarock, W.C., J.B. Klemp, J. Dudhia, D.O. Gill, D.M. Barker, W. Wang and J.G. Powers, *A description of the advanced research WRF version 3*. Tech. Note TN-475+STR, 2008: p. 1-96.
- 2) 嶋田進, 劉媛媛, 夏慧, 吉野純, 小林智尚, 板垣昭彦, 宇都宮健史, 橋本潤, メソ気象モデル WRF による日射計算の精度検証. 太陽エネルギー, 2012. **38**(5): p. 41-48.
- 3) 嶋田進, 劉媛媛, 吉野純, 小林智尚, 和澤良彦, 気象モデルによる日射予測 その1: 予測システムの概要と精度検証. 太陽エネルギー, 投稿中.
- 4) Kalnay, E., *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability* 2002: Cambridge University Press.
- 5) Kalman, R.E., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering, 1960(82 (Series D)): p. 35-45.
- 6) 中野翔太, 高橋康人, 藤原耕二, 石原好之, 雲量と湿度のMSMデータを用いた日射量予測に関する検討. 太陽/風力エネルギー講演論文集, 2011. **2011**: p. 167-170.
- 7) 桶真一郎, 見目喜重, 滝川浩二, 榎原建樹, ニューラルネットワークによる気圧予測を介した日射量予測. 太陽/風力エネルギー講演論文集, 2004. **2004**: p. 53-56.
- 8) ガリ ダシルバフォンセカジョアン, 大関崇, 高島工, 荻本和彦, サポートベクターマシンを用いた日射量予測に関する研究. 電気学会研究会資料. MES, メタボリズム社会・環境システム研究会, 2011. **2011**(1): p. 63-68.
- 9) 国次雅司, カルマンフィルターを用いた天気予報ガイドス. 天気, 1997. **44**(6): p. 413-417.
- 10) Kim, P. and L. Huh, *Kalman filter for beginners : with MATLAB examples* 2011.

- 11) Lange, M. and U. Focken, *Physical approach to short-term wind power prediction* 2006: Springer.
- 12) Lorenz, E., J. Hurka, D. Heinemann and H.G. Beyer, *Irradiance Forecasting for the Power Prediction of Grid-Connected Photovoltaic Systems*. *Ieee Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2009. **2**(1): p. 2-10.
- 13) 立川良三, 気象予報による意思決定: 不確実情報の経済価値 1999: 東京堂出版.
- 14) 統計分布ハンドブック 2010: 朝倉書店